**UNIDAD VII**

**SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFRENCIALES ORDINARIAS**

**Contenido**

Contenido

[VII.SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFRENCIALES ORDINARIAS 2](#_Toc24529816)

[7.0. Generalidades 2](#_Toc24529817)

[Ejemplos. 2](#_Toc24529818)

[7.1. Introducción al problema de valor inicial PVI 4](#_Toc24529819)

[**7.2.1. Método de Euler** 6](#_Toc24529820)

[**CONDICIÓN INICIAL** 7](#_Toc24529821)

[Algoritmo para el método de Euler 10](#_Toc24529822)

[Comparando con la solución analítica 10](#_Toc24529823)

[Solución Analítica 11](#_Toc24529824)

[Ejemplo 2 Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial: 12](#_Toc24529825)

[Solución numérica 13](#_Toc24529826)

[Ejemplo 3 Aplicar el método de Euler para aproximar , dada la ecuación diferencial. 14](#_Toc24529827)



[7.2.2. Método de Taylor 15](#_Toc24529828)

[7.2.3.1 Resolver los ejemplos anteriores usando el Método de Euler modificado 17](#_Toc24529829)

[Aplicación del método de Taylor 20](#_Toc24529830)

[**Resolver por el método de Taylor** 20](#_Toc24529831)

[7.2.3. Método de Euler Modificado 21](#_Toc24529832)

[7.2.4. Método de Runge-Kutta 23](#_Toc24529833)

[7.2.4.1. Método de Runge-Kutta de segundo orden 23](#_Toc24529834)

[7.2.4.2. Método de Runge-Kutta de cuarto orden 26](#_Toc24529835)

[7.3. Ejemplos y aplicación 26](#_Toc24529836)

[7.4 Ejercicios y aplicaciones 36](#_Toc24529837)

[7.5. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE E.D.O 39](#_Toc24529838)

[7.5.1. Estructura 39](#_Toc24529839)

[7.5.2. Ejemplo y Aplicaciones 40](#_Toc24529840)

# VII.SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFRENCIALES ORDINARIAS

## 7.0. Generalidades

Generalmente el MRCOD se interpreta usando las leyes fundamentales de la física: la mecánica, la electricidad y la termodinámica que con frecuencia se basan en las observaciones empíricas que explican las variaciones de las propiedades físicas y los estados de los sistemas. Más que en describir directamente el estado de los sistemas físicos, las leyes a menudo se expresan en términos de los cambios del espacio y del tiempo.

### Ejemplos.

1. Segunda Ley de Movimiento de Newton. donde v velocidad F fuerza y m masa, t tiempo,
2. Ley drl calor , donde , q: flujo del calor, k´ : conductividad térmica, T temperatura, x: Posición.
3. Ley de la difusión Fick , , donde, J: flujo másico, D: coeficiente de difusión, c: Concentración, x: posición.
4. Ley da Faraday Caída de voltaje a través de un inductor, , donde, : caída de voltaje, L Inductancia, i Corriente.

Los ejemplos anteriores muestran leyes que definen mecanismos de cambio.

Cuando se combinan con las leyes de conservación de la energía, masa o momentos, resultan ecuaciones diferenciales.

La integración subsecuente de estas ecuaciones diferenciales origina funciones matemáticas que describen el estado espacial y temporal de un sistema en términos de variaciones de energía, masa o velocidad.

El problema del paracaidista en caída, es un ejemplo de la obtención de una ecuación diferencial ordinaria, a partir de una ley fundamental.

Recuerde que se utilizó la segunda ley de Newton para desarrollar una EDO que describe la razón de cambio de la velocidad de un paracaidista en caída.

Al integrar esta expresión, obtenemos una ecuación para predecir la velocidad de caída como una función del tiempo. Esta ecuación se utiliza de diferentes formas, entre ellas para propósitos de diseño.

De hecho, tales relaciones matemáticas son la base para la solución de un gran número de problemas de ingeniería. Sin embargo anteriormente, muchas de las ecuaciones diferenciales de importancia práctica no se pueden resolver utilizando los métodos analíticos de cálculo. Así los métodos que se estudiarán en los siguientes resultan extremadamente importantes en todos los campos de la ingeniería.

En esta oportunidad nos proponemos los siguientes objetivos específicos,

1. Comprender las representaciones visuales de los métodos de Euler, de Heun y del punto medio.

2. Conocer la relación del método de Euler con la expansión de la serie de Taylor y la implicación que esto tiene con respecto al error del método.

3. Reconocer la diferencia entre los errores de truncamiento local y global, y cómo se relacionan con la selección de un método numérico para un problema específico.

4. Entender el orden y la dependencia del tamaño de paso respecto de los errores de truncamiento global, para todos los métodos descritos y entender cómo dichos errores tienen que ver con la exactitud de las técnicas.

5. Comprender la base de los métodos predictor-corrector; en particular, percatarse que la eficiencia del corrector es dependiente de la exactitud del predictor.

6. Conocer la forma general de los métodos de Runge-Kutta; entender la deducción del método RK de segundo orden y cómo se relaciona con la expansión de la serie de Taylor; darse cuenta de que hay un número infinito de versiones posibles para los métodos RK de segundo orden y de orden superiores.

7. Saber cómo aplicar cualquiera de los métodos RK a los sistemas de ecuaciones; poder reducir una EDO de n-ésima orden a un sistema de n EDO de primer orden.

8. Reconocer el tipo de contexto de un problema donde es importante ajustar el tamaño de paso.

9. Entender cómo se agrega el control del tamaño de paso adaptativo a un método RK de cuarto orden.

10. Saber de qué modo la combinación de los componentes lentos y rápidos actúa en la solución de una ecuación o un sistema de ecuaciones rígidos.

11. Distinguir entre esquemas de solución implícitos y explícitos para las EDO; en particular, reconocer cómo 1. se disminuye la rigidez del problema y 2. se complica la mecánica de solución.

12. Detectar la diferencia entre problemas de valor inicial y de valores en la frontera.

13. Saber la diferencia entre los métodos de pasos múltiples y de un paso; darse cuenta de que todos los métodos de pasos múltiples son predictor-corrector, pero no a la inversa.

14. Comprender la relación entre fórmulas de integración y métodos predictor-corrector.

15. Reconocer la diferencia fundamental entre las fórmulas de integración de Newton-Cotes y la de Adams.

16. Entender la fundamentación de los métodos de polinomios y de potencias para determinar los valores propios; en particular, reconocer sus ventajas y sus limitaciones.

17. Saber cómo la defl ación de Hoteller permite que el método de potencias se utilice para calcular los valores propios intermedios.

18. Utilizar los paquetes de software y/o bibliotecas para integrar las EDO y evaluar los valores propios.

## 7.1. Introducción al problema de valor inicial PVI

1. En general una EDO de primer orden está dado por:

……………………………………………..(2)

1. Teóricamente se dice que la solución de una EDO debe contener una constante arbitraria “C”, consecuentemente la solución general de (2) es:

……………………………………………………(3)

y

**Observaciones:**

1. La relación (3) representa una familia de curvas en el plano xy, en donde cada curva se obtiene para un valor particular de “C”.
2. Cada curva representa a una solución particular de EDO.
3. Las constantes “C” son obtenidos analíticamente, exigiendo que la solución de esa ecuación pase por algún punto (x0, y0) esto es:

, ……………………………………… ……………………..(4)

i.e.: que “*y”* vale “*y0”* cuando “*x”* es “*x0”*

**Interpretación Gráficamente:**

X0

Y0

1. Como se mencionó al inicio la gran mayoría de las ecuaciones no pueden resolverse utilizando técnicas analíticas, lo que obligan a estudiar métodos numéricos.

Debemos resaltar que cuando usamos los métodos numéricos no encontramos soluciones de la forma F(x,y,c) = 0 pues se trabajan con números y se tiene resultados numéricos. Pero el propósito es determinar valores de “*y”* que correspondan a valores específicos de “*x”* los cual es factible con métodos numéricos.

1. El problema de valor inicial (P.V.I.) queda formulado así:
   1. Una ecuación diferencial de primer orden:

* 1. Un valor de “*y*” en un punto conocido “*x0*” (condición inicial)



* 1. El valor “*x*f” es donde se quiere conocer el valor de “*y(x*f *)”*

**Matemáticamente.**

(1) EDO 1° orden

(2) C. I.

(3) Lo que se busca

P.V.I.



**7.2.1. Método de Euler**

Este método consiste en dividir el intervalo [x0, xf] en “n” subintervalos de ancho h esto es:

, (1)



Lo que permite determinar un conjunto de puntos discretos n+1, i.e.:

X0, X1, X2,..., Xn-1, Xn

x1 x2 x3 ... xi xi+1 ... xn-1 xn

x0

xf

**Observando que:**

Para cualquier punto se tiene.



En general

,  (2)

Paso muy similar al paso de integración numérica.

**CONDICIÓN INICIAL**

1.  representa el punto , por donde pasa la curva solución de la ecuación PVI. lo que será denotado por F(x) = y, en lugar de F(x,y,c1) = 0.
2. Consecuentemente: teniendo el punto P0 podemos evaluar la primera derivada de F(x) en ese punto P0. Esto es:

**………….(3)**

1. Teniendo esta información (3) trazamos una recta la que pasa por P0 y de pendiente

: ,…(4)

que aproxima F(x) en una vecindad de X0.

1. Tomamos la recta L3 en vez de F(x) y localizamos en esta recta el valor de y1 que corresponde a x1. Esto es resolviendo para .

 ,…(5)

,…..(6)

La ordenada pues existe un error

**Gráfica**

P0(x0,y0)

error

F0(x0,y0)

y0

y1

F(x0)

F(xf)

x0

x1

x0 x1 x3 x4 xi xn

(1) En esencia se trata de aproximar la curva y = F(x) por medio de una serie de segmentos de líneas rectas.

(2) El método comete un error de truncamiento que es propio del método.

(3) El error de (2) se puede anular tanto como se quiera, reduciendo la longitud de “h” teóricamente.

(4) Debido a (3) se comete un error de redondeo más alto.

, … (7)

Este modelo se le conoce con el nombre de Método de Euler , o método de Euler Cauchy, o de punto pendiente. Se predice un nuevo valor de y usando la pendiente (igual a la primera derivada en el valor original de x) para extrapolar linealmente sobre el tamaño de paso h.

Ejemplo.

Usando el método de Euler integrar numéricamente la siguiente.

,

desde x = 0 hasta x = 4 con un tamaño de paso 0.5. La condición inicial en x = 0 es y = 1.

Recuerde que la solución exacta está dada por la ecuación, por:

.

**Solución.**

Se utiliza la ecuación (7) para implementar el método de Euler:

y(0.5) = y(0) + ƒ(0, 1)0.5

donde y(0) = 1 y la pendiente estimada en x = 0 es:

.

Por lo tanto,

y(0.5) = 1.0 + 8.5(0.5) = 5.25

La solución verdadera en x = 0.5 es:

.

Así, el error es:

**Et = valor verdadero – valor aproximado = 3.21875 – 5.25 = –2.03125**

o, expresada como error relativo porcentual, .

En el segundo paso,

y(1) = y(0.5) + ƒ(0.5, 5.25)0.5

= 5.25 + [–2(0.5)3 + 12(0.5)2 – 20(0.5) + 8.5]0.5

= 5.875

La solución verdadera en x = 1.0 es 3.0 y, entonces, el error relativo porcentual es –95.8%. El cálculo se repite.

* + - 1. **Aplicaciones Resueltos**

**Resolver PVI usando Euler:**

**Ejemplo 1**

Solución

1. El intervalo de interés [x0,xf] = [0,1]
2. Determinando h: dividimos el intervalo [0,1] en 5 subintervalos 
3. Determinar los argumentos:



1. Determinando los valores de yi

.

.

.

,

.

.

### Algoritmo para el método de Euler

**….**

### Comparando con la solución analítica

La solución analítica es: 1.10364

El error absoluto 

El error relativo 



El error potencial 

### Solución Analítica

En general la forma de una Ecuación diferencial lineal de orden “A” es:

 ………(1)

La solución de (1) son soluciones exponenciales, o se construyen a partir de funciones exponenciales. En donde su solución general es:



Solución particular

i.e.: , hallar  en nuestro caso:

1. ,  luego
2.  entonces  , i.e. , 

Entonces   



1. Determinando y1 (x)

 i.e. 

Luego



1. La solución General

 Aplicando C.I. X0 = 0



El valor de x = 1



### Ejemplo 2 Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:



Aproximar .  
**NOTA**Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones.



***Solución Analítica*.**



Sustituyendo la condición inicial:



Por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:



Y por lo tanto, el valor real que se pide es:

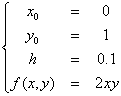


### Solución numérica

Aplicamos el método de Euler y para ello, observamos que la distancia entre y no es lo suficientemente pequeña. Si dividimos esta distancia entre cinco obtenemos un valor de y por lo tanto, obtendremos la aproximación deseada en cinco pasos.



De esta forma, tenemos los siguientes datos:



Sustituyendo estos datos en la fórmula de Euler, tenemos, en un primer paso:



Aplicando nuevamente la fórmula de Euler, tenemos, en un segundo paso:



Y así sucesivamente hasta obtener . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* |  |  |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0.1 | 1 |
| 2 | 0.2 | 1.02 |
| 3 | 0.3 | 1.0608 |
| 4 | 0.4 | 1.12445 |
| 5 | 0.5 | 1.2144 |

  Concluimos que el valor aproximado, usando el método de Euler es:



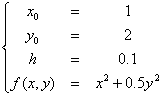
Puesto que en este caso, conocemos el valor verdadero, podemos usarlo para calcular el error relativo porcentual que se cometió al aplicar la formula de Euler. Tenemos que:



### Ejemplo 3 Aplicar el método de Euler para aproximar , dada la ecuación diferencial.



***Solución***  
Nuevamente vemos que nos conviene dividir en pasos la aproximación. Así, elegimos nuevamente para obtener el resultado final en tres pasos. Por lo tanto, aplicamos el método de Euler con los siguientes datos:



En un primer paso, tenemos que:



Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* |  |  |
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1.1 | 2.3 |
| 2 | 1.2 | 2.6855 |
| 3 | 1.3 | 3.1901 |

De lo cual, concluimos que la aproximación buscada es:



### 7.2.2. Método de Taylor

Podemos observar que el método anterior usa los dos primeros términos de la serie de Taylor para su primera iteración, i.e.;

 (\*1)

De manera natural se puede pensar que para determinar y2 se expandió de nuevo F(x) en la serie de Taylor. Así:

 (\*2)

Pero se debe resaltar que no disponemos de los valores exactos de F(x1) y F’(x1), los que se usan en la expansión de Taylor de F(x) alrededor de x1 lo que permite no evaluar la parte derecha (\*2) consecuentemente para los otros valores de x se usa:

 (\*3)

La relación (\*3) tiene mucha similitud con la expansión en serie Taylor.

Si aplicamos la información acerca de las series de Taylor con la finalidad de mejorar la exactitud del método de Euler, obtendremos los llamados Algoritmos de Taylor.

Usemos tres términos en lugar de dos en la expresión de F(x1), i.e.

 (\*4)

Pero

 y



Luego;  (\*5)

Entonces se sugiere considerar (\*5) para obtener y2, y3,..., yn mejoraría la exactitud obtenida con (\*1) consecuentemente se propone la fórmula:

 (\*6)

La utilidad de la relación (\*6) depende de cuan fácil sea la diferenciación de f(x,y)

Si f(x,y) es una función solo de x, la diferenciación con respecto a x es relativamente fácil y la fórmula propuesta es muy práctica.

En general f(x,y) es una función de x ^ y habrá que usar derivadas totales

La derivada total de f(x,y) con respecto a x está dada por 

### 7.2.3.1 Resolver los ejemplos anteriores usando el Método de Euler modificado

**Ejemplo 1**

1° 

2°  derivada promedio

Luego 

Segunda integración

1° 

2° 

Tercera integración

1° 

2° 

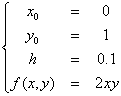
**Ejemplo 2**  
Aplicar el método de Euler mejorado, para aproximar si:



***Solución***  
Vemos que este es el mismo ejemplo 1 del método anterior. Así que definimos y encontraremos la aproximación después de cinco iteraciones. A diferencia del método de Euler 1, en cada iteración requerimos de dos cálculos en vez de uno solo: el de primero y posteriormente el de .



Para aclarar el método veamos con detalle las primeras dos iteraciones. Primero que nada, aclaramos que tenemos los siguientes datos iniciales:



En nuestra primera iteración tenemos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Nótese que el valor de coincide con el (Euler 1), y es el único valor que va a coincidir, pues para calcular se usará y no .



Esto lo veremos claramente en la siguiente iteración:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Nótese que ya no coinciden los valores de (Euler 1) y el de . El proceso debe seguirse hasta la quinta iteración. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* |  |  |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0.1 | 1.01 |
| 2 | 0.2 | 1.040704 |
| 3 | 0.3 | 1.093988 |
| 4 | 0.4 | 1.173192 |
| 5 | 0.5 | 1.28336 |

Concluimos entonces que la aproximación obtenida con el método de Euler mejorado es:



Con fines de comparación, calculamos el error relativo verdadero:



Vemos que efectivamente se ha obtenido una mejor aproximación con este método, reduciendo el error relativo verdadero de un 5.4% hasta un 0.05%. En nuestro tercer método veremos cómo se reduce aún más este error prácticamente a un 0%!

Veamos un segundo ejemplo.  
  
**Ejemplo 2**  
Aplicar el método de Euler mejorado para aproximar *y*(1.3) si tenemos :



***Solución***  
Tenemos los siguientes datos:



En una primera iteración, tenemos lo siguiente:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* |  |  |
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1.1 | 2.385 |
| 2 | 1.2 | 2.742925 |
| 3 | 1.3 | 3.07635 |

  Concluimos entonces que la aproximación buscada es:



## Algoritmo Taylor

function taylor()

% metodo euler modificado

%

% Mediante este metodo podremos obtener una funcion a partir de su derivada y

% un punto inicial (x0,y0), teniendo como grado de exactitud de

% aproximacion de el orden grado de derivacion de metodo de taylor.

%

% entrada:

% valor\_x\_inicial: valor inicial x0;

% valor\_fx\_inical: valor inicial fx0;

% dfx: derivada de la funcion

% salida:

% fx: funcion polinomial aproximada

clear all

clc

syms x

fun=input('f(x): ');

f = inline(fun);

x1 = input('X(i): ');

x2 = input('X(i+1): ');

n = input('Número de Orden: ');

h = abs(x2 - x1);

v1 = f(x1);

v2 = f(x2);

et = abs((v2 - v1)/v2 \* 100);

X(1,:) = [0 v1 0 et];

for i=1:n

X(i+1,1) = i;

D = diff(fun,i);

d1=inline(D);

d=d1(x1);

v1= v1+(d\*((h^i)/factorial(i)));

X(i+1,2) = v1;

et=abs(((v2-v1)/v2)\*100);

X(i+1,4) = et;

ea = abs((X(i+1,2)-X(i,2))/X(i,2)\*100);

X(i+1,3) = ea;

if ea <=10^(-1)

break

end

end

end

## Aplicación del método de Taylor

**Resolver por el método de Taylor**



1. Cálculo de: h = 0.2
2. Cálculo de , , , , , 
3. Aplicando: 



En donde











## 7.2.3. Método de Euler Modificado

En el método de Euler se tomó como válida para todo el intervalo la derivada encontrada en un extremo.

Y = F(x)

X0 h X1

Y0

F(x0,y0)

Si queremos obtener una exactitud razonable se toma h muy pequeña, a cambio de un mayor error de redondeo

El método presente trata de evitar tal problema utilizando un valor promedio de la derivada tomada en los extremos del intervalo. Constado de 2 pasos:

1° Se inicia de (x0,y0), usar el método de Euler para determinar “y” correspondiente a x1, valor que será denotado por , puesto que se trata de un valor transitorio de y1. Este paso se le llama paso predictor.

2° Este paso se llama corrector, pues trata de corregir la predicción en el nuevo punto  se evalúa la derivada  usando la ecuación diferencial ordinaria P.V.I. que se está resolviendo, se obtiene la media aritmética de esta derivada y la derivada en el punto inicial (x0,y0)

Derivada Promedio =

Usamos la derivada promedio para calcular el nuevo valor y1 con la ecuación de Euler, que será mas exacto que 

 Que será el valor definitivo de y1.

El proceso se repite hasta llegar a yn.

***Paso de Predicción***



Una vez obtenida  se calcula , la derivada en el punto y se promedia con la derivada previa  para encontrar la derivada promedio

Derivada Promedio:  q sustituyendo  con este valor promedio en la ecuación de Euler obtenemos:



## 7.2.4. Método de Runge-Kutta

### 7.2.4.1. Método de Runge-Kutta de segundo orden

Estos métodos que se encuentran relacionados a los nombres de Runge (1885), Kutta (1901), Heun (1900) y otros, para solucionar P.V.I .Consiste en obtener un resultado que se obtendrá al utilizar un número finito de términos de una serie de Taylor de la forma:

🡪(1)

Con una aproximación en la cual se calcula de una formula del tipo:

🡪 (2)

En donde:

*α, u, b* son determinados de modo que si se expandiera con , en serie de Taylor alrededor de ( xi ,yi ); debemos observar que los coeficientes de h, h2, h3, etc., coincidirían con los coeficientes de la ecuación (1).

Supongamos *p*=1 tendremos

…. (3)e

**Observaciones:**

1. En esta relación se evalúa en , en donde  es tal que : , para mantener la abcisa del segundo punto dentro del intervalo de interés, con lo que .Gráficamente

*(xi,yi)*

*(xi+uh , yi+λk0)*

*yi+1*

*yi+1+h f( xi , yi )*

*xi*

*xi+1*

1. *b* puede ser manejado más libremente y expresarse 

 ….. (4)

Con *k0 = h f(xi,yi)*

1. y esta por determinar α0, α1, μ, λ tal que la ecuación (3) tenga una aproximación en potencias de h, cuyos primeros términos coinciden con los primeros términos de ecuación (1).
2. Para cumplir con (3) expandimos primero en serie de Taylor.

……(5)

Todas las derivaciones son evaluadas en 

Sustituyendo en la ecuación (3)

Arreglando en potencias de h, tenemos

…………….(6)

Para que los coeficientes correspondientes de *h, h2* coincidan en las ecuaciones (1) y (6) se requiere que:



…………. (7)

1. Observamos que existen 4 incógnitas para solo tres ecuaciones y, por tanto se tiene un grado de libertad en la solución de la ecuación (7). Podríamos pensar en usar este grado de libertad para hacer coincidir los coeficientes de *h3*. Sin embargo, es obvio que esto es imposible para cualquier forma que tenga la función *f(x,y)*. Existe entonces un número de infinito de soluciones de la ecuación (7), pero quizás la más simple sea :



1. La relación de (5) conduce a la formula

o bien

…………. (8)

1. La relación (8) es conocida como algoritmo de Runge-Kutta de segundo orden.

Lo de segundo orden por coincidir con los tres primeros términos de la serie de Taylor que es la formula de Euler Modificado.

* + Este método proporciona mayor exactitud que la de Euler.
  + Se puede usar un valor de h no tan pequeño como el primero .El precio de es la evaluación *f(x,y)* dos veces en cada subintervalo contra uno en el método de Euler.

1. Las fórmulas de Runge-Kutta de cualquier orden se puede derivar de manera análoga que la de segundo orden.

### 7.2.4.1.1 algoritmo runge kutta Segundo orden

Algoritmo:

function metodo\_euler\_modificado()

% metodo euler modificado

%

% Mediante este metodo podremos obtener una funcion a partir de su derivada y

% un punto inicial (x0,y0), teniendo como grado de exactitud de

% aproximacion de cuarto grado debido a que el metodo usa 2 veces la

% primera derivada para no usar las derivadas de segundo orden.

%

% entrada:

% valor\_x\_inicial: valor inicial x0;

% valor\_fx\_inical: valor inicial fx0;

% dfx: derivada de la funcion

% salida:

% fx: funcion polinomial aproximada

%%obtencion de datos inciales

clc;

[derivada,valor\_inicial\_x,valor\_inicial\_y,n,h] = obtenerDatosParaEcuacionesDiferenciales();

%%declaracion de datos a manejar

syms y; syms x;

%decalracion del vector de valores aproximados fx y respectivos x

vector\_valores\_fx= zeros(n+1,1);

vector\_valores\_x= zeros(n+1,1);

vector\_valores\_k= zeros(n+1,2);

%declaracion de los valores temporales que apoyan al desarrollo

vector\_valores\_x(1)= valor\_inicial\_x;

vector\_valores\_fx(1)= valor\_inicial\_y;

for i= 1:n+1

% calculo del k1

x=vector\_valores\_x(i);

y=vector\_valores\_fx(i);

k1= eval(derivada);

%calculo del k2

x=vector\_valores\_x(i)+h/2;

y=vector\_valores\_fx(i)+h\*k1;

k2= eval(derivada);

%Se almacena los valores de k

vector\_valores\_k(i,:)= [k1,k2];

%calculo del punto aproximado de la funcion

if i<n+1

vector\_valores\_fx(1+i)= vector\_valores\_fx(i)+(h/2)\*(k1+k2);

vector\_valores\_x(1+i)=vector\_valores\_x(i)+h;

end

end

funcion\_aproximada=minimos\_cuadrados\_parametrada(1,n+1,vector\_valores\_x,vector\_valores\_fx);

%Se muestra el procedimiento para obtener la funcion

for j=1:n

fprintf("Para la iteracion n°%1.0d\n\n",j);

fprintf("k1 = f(x%1.0d,y%d) = f(%d,%d) = %d\n",j-1,j-1,vector\_valores\_x(j),vector\_valores\_fx(j),vector\_valores\_k(j,1));

fprintf("k2 = f(x%1.0d +h,y%1.0d+h\*k1) = f(%3.4d+%3.4d,%d+%3.4d\*%3.4d) = %3.4d\n\n",j-1,j-1,vector\_valores\_x(j),h,vector\_valores\_fx(j),h,vector\_valores\_k(j,1),vector\_valores\_k(j,2));

fprintf("valor de y%1.0d a partir de (yi+1=yi+h/2\*(k1+k2)) = %3.4d, con un valor x de %3.4d\n\n",j,vector\_valores\_fx(j+1),vector\_valores\_x(j+1));

end

%Se halla y muestra el polinomio aproximado

Funcion\_Aproximada="f(x)=";

for i=1:size(funcion\_aproximada',1)

if(i~=size(funcion\_aproximada',1))

Funcion\_Aproximada = Funcion\_Aproximada +" " +funcion\_aproximada(i)+"\*x^"+(i-1)+" +";

else

Funcion\_Aproximada = Funcion\_Aproximada +" " +funcion\_aproximada(i)+"\*x^"+(i-1);

end

end

fprintf("la funcion aproximada es mediante ecuaciones diferenciales %s\n",Funcion\_Aproximada);

end

### 7.2.4.2. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

1. La ecuación (9) tiene mucha coincidencia con los 5 primeros términos de la serie de Taylor lo que significa gran exactitud sin calculo de derivadas, pero a cambio, se tiene que evaluar la función *f(x,y)*cuatro veces en cada subintervalo.

### 7.2.4.2.1 Algoritmo runge kutta 4to orden

function metodo\_rungen\_kutta\_cuarto\_orden()

% metodo rungen kutta cuarto orden

%

% Mediante este metodo podremos obtener una funcion a partir de su derivada y

% un punto inicial (x0,y0), teniendo como grado de exactitud de

% aproximacion de cuarto grado debido a que el metodo usa 4 veces la

% primera derivada para no usar las derivadas de segundo, tercer y cuarto

% orden.

%

% entrada:

% valor\_x\_inicial: valor inicial x0;

% valor\_fx\_inical: valor inicial fx0;

% dfx: derivada de la funcion

%

% salida:

% fx: funcion polinomial aproximada

%%obtencion de datos inciales

clc;

[derivada,valor\_inicial\_x,valor\_inicial\_y,n,h] = obtenerDatosParaEcuacionesDiferenciales();

%%declaracion de datos a manejar

syms y; syms x;

%decalracion del vector de valores aproximados fx y respectivos x

vector\_valores\_fx= zeros(n+1,1);

vector\_valores\_x= zeros(n+1,1);

vector\_valores\_k= zeros(n+1,4);

%declaracion de los valores temporales que apoyan al desarrollo

vector\_valores\_x(1)= valor\_inicial\_x;

vector\_valores\_fx(1)= valor\_inicial\_y;

for i= 1:n+1

% calculo del k1

x=vector\_valores\_x(i);

y=vector\_valores\_fx(i);

k1= eval(derivada);

%calculo del k2

x=vector\_valores\_x(i)+h/2;

y=vector\_valores\_fx(i)+h\*k1/2;

k2= eval(derivada);

%calculo del k3

x=vector\_valores\_x(i)+h/2;

y=vector\_valores\_fx(i)+h\*k2/2;

k3= eval(derivada);

%calculo del k4

x=vector\_valores\_x(i)+h;

y=vector\_valores\_fx(i)+h\*k3;

k4= eval(derivada);

%Se almacena los valores de k

vector\_valores\_k(i,:)= [k1,k2,k3,k4];

%calculo del punto aproximado de la funcion

if i<n+1

vector\_valores\_fx(1+i)= vector\_valores\_fx(i)+(h/6)\*(k1+2\*(k2+k3)+k4);

vector\_valores\_x(1+i)=vector\_valores\_x(i)+h;

end

end

funcion\_aproximada=minimos\_cuadrados\_parametrada(1,n+1,vector\_valores\_x,vector\_valores\_fx);

%Se muestra el procedimiento para obtener la funcion

for j=1:n

fprintf("Para la iteracion n°%1.0d\n\n",j);

fprintf("k1 = f(x%1.0d,y%d) = f(%d,%d) = %d\n",j-1,j-1,vector\_valores\_x(j),vector\_valores\_fx(j),vector\_valores\_k(j,1));

fprintf("k2 = f(x%1.0d +h/2,y%1.0d+h\*k1/2) = f(%3.4d+%3.4d/2,%3.4d+%3.4d\*%3.4d/2) = %3.4d\n",j-1,j-1,vector\_valores\_x(j),h,vector\_valores\_fx(j),h,vector\_valores\_k(j,1),vector\_valores\_k(j,2));

fprintf("k3 = f(x%1.0d +h/2,y%1.0d+h\*k2/2) = f(%3.4d+%3.4d/2,%3.4d+%3.4d\*%3.4d/2) = %3.4d\n",j-1,j-1,vector\_valores\_x(j),h,vector\_valores\_fx(j),h,vector\_valores\_k(j,2),vector\_valores\_k(j,3));

fprintf("k4 = f(x%1.0d +h,y%1.0d+h\*k3) = f(%3.4d+%3.4d,%d+%3.4d\*%3.4d) = %3.4d\n\n",j-1,j-1,vector\_valores\_x(j),h,vector\_valores\_fx(j),h,vector\_valores\_k(j,3),vector\_valores\_k(j,4));

fprintf("valor de y%1.0d = %3.4d, con un valor x de %3.4d\n\n",j,vector\_valores\_fx(j+1),vector\_valores\_x(j+1));

end

%Se halla y muestra el polinomio aproximado

Funcion\_Aproximada="f(x)=";

for i=1:size(funcion\_aproximada',1)

if(i~=size(funcion\_aproximada',1))

Funcion\_Aproximada = Funcion\_Aproximada +" " +funcion\_aproximada(i)+"\*x^"+(i-1)+" +";

else

Funcion\_Aproximada = Funcion\_Aproximada +" " +funcion\_aproximada(i)+"\*x^"+(i-1);

end

end

fprintf("la funcion aproximada es mediante ecuaciones diferenciales %s\n",Funcion\_Aproximada);

end

## 7.3. Ejemplos y aplicación

**Ejemplo 1**



Usando Runge-Kutta de cuarto orden.

***Solución:***

* *Primera Iteración: Calculo de constantes k1, k2, k3, k4*



*Cálculo De y1:*



* *Segunda Iteración: Calculo de constantes k1, k2, k3, k4*



*Cálculo De y2:*



* *Continuando llegamos a:*



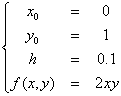
*Observación:*

* + *Los métodos descritos se llaman también métodos de un solo paso porque se apoyan y usan (xi,yi) para el cálculo de yi+1.*
  + *Estos Métodos además se apoyan en puntos xi y xi+1 pero nunca en puntos anteriores a xi.*

**Ejemplo 2**   
Usar el método de Runge-Kutta para aproximar dada la siguiente ecuación diferencial:



***Solución***  
Primero, identificamos el mismo ejemplo 1 de los dos métodos anteriores. Segundo, procedemos con los mismos datos:



Para poder calcular el valor de , debemos calcular primeros los valores de , , y . Tenemos entonces que:



Con el fin de un mayor entendimiento de las fórmulas, veamos la siguiente iteración:



El proceso debe repetirse hasta obtener . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* |  |  |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0.1 | 1.01005 |
| 2 | 0.2 | 1.04081 |
| 3 | 0.3 | 1.09417 |
| 4 | 0.4 | 1.17351 |
| 5 | 0.5 | 1.28403 |

Concluimos que el valor obtenido con el método de Runge-Kutta es:



Finalmente, calculamos el error relativo verdadero:

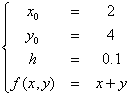


Con lo cual vemos que efectivamente se ha reducido muchísimo el error relativo. De hecho observamos que tenemos 6 cifras significativas en la aproximación!

**Ejemplo 3**  
Usar el método de Runge-Kutta para aproximar dada la ecuación diferencial:



***Solución***  
Igual que siempre, tomamos y llegaremos a la aproximación en dos pasos.  
Con esta aclaración, tenemos los siguientes datos:



**Primera Iteración:**



**Segunda Iteración:**



Concluimos entonces que el valor buscado es:

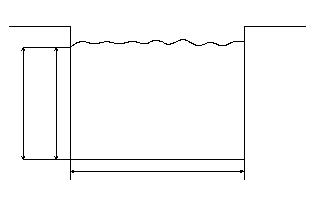


**Ejemplo 4**

Un tanque cilíndrico de fondo plano con un diámetro de 1.5m contiene un liquido de densidad ρ = 1.5 Kg./l a una altura “a” de 3m. Se desea saber la altura del liquido dentro del tanque tres minutos después de que se abra completamente la válvula de salida, la cual da un gasto de m3/s, donde A es el área seccional del tubo de salida y es 78.5x10-4 m2 y g =9.81 m/s2.



*Solución:*



a

3m

1.5 m

*a:? después de 3 minutos*

*Salida : ; A=78.5x10-4 m2 ; g=9.81 m/s2.*



*Acumulación = Entrada - Salida*

*, pero v= (área de la base )x(Altura)*



*, Usar Euler con seg.=h*

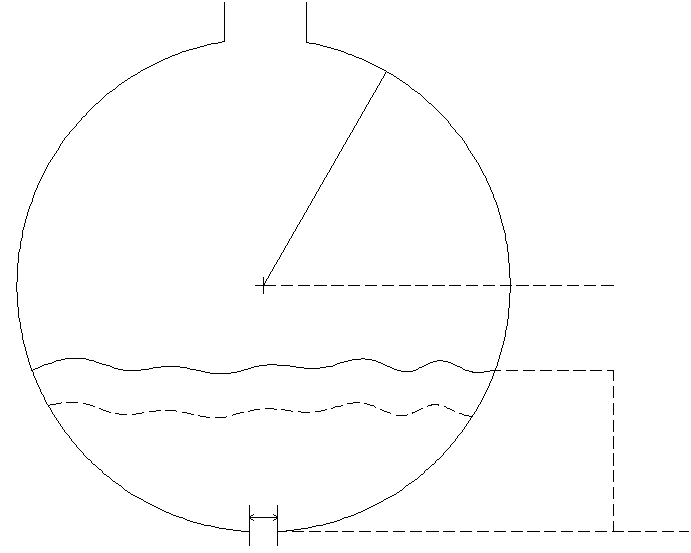


**Ejemplo 5**

Calcule el tiempo necesario para que el nivel del liquido dentro del tanque esférico con radio r = 5m, ver figura, pase de 4m a 3m,la velocidad de salida por el orificio del fondo es m/s, el diámetro de dicho orificio es de 10 cm.



***Solución:***











*Balance de Materia:*

*Acumulación = Entrada – Salida*



*El volumen del liquido en el tanque en función de la altura es :*



*A = área del orificio de salida*

*;*



*Luego tenemos:*



*Luego: el , aplicar Euler y un h=10*



**Ejemplo 6**

En un tanque perfectamente agitado se tiene 400 litros de una solución en la que están disueltos 25Kg. de sal ( NaCl ). En cierto momento se hace llegar al tanque un gasto de 80 l/min. de una solución que contiene 0.5 Kg. de sal común por litro. Si se tiene un gasto de salida de 80 l/min. Determinar que cantidad de sal hay en el tanque transcurridos 10 min?

***Solución:***

*X: la cantidad de sal en Kg., en el tanque después de t minutos.*

*La acumulación de sal en el tanque esta dado por y por la relación:*



*con las condiciones iniciales:*



**Ejemplo 7**

Se hace reaccionar isotérmica mente 260g de acetato de etilo (CH3C00C2H5) con 175g de hidróxido de sodio (NaOH) en solución acuosa (ajustando el volumen total a 5 litros) para dar acetato de sodio (CH3COONA) y alcohol etílico (C2H5OH), de acuerdo con la ecuación estequiométrica en donde K: constante de reacción dado por . Determinar la cantidad de acetato de sodio y alcohol etílico presentes 30 minutos después de iniciada la reacción.



***Solución:***

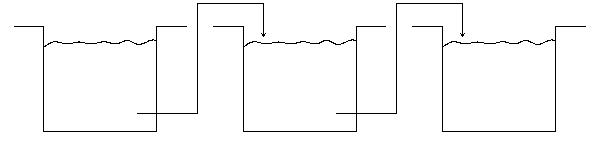
*Sea:*

*X: La cantidad de moles por litro se aceite de etilo que han reaccionado al tiempo t. Entonces, la velocidad de reacción viene dada por la ley de acción de masas , en donde CA, CB denotan las concentraciones molares de los reactantes ácidos de etilo e hidróxido de sodio al tiempo t, los exponentes son sus coeficientes estequiométricos en la reacción, entonces:*



**Ejemplo 8**

Se tiene tres tanques de 1000 litros de capacidad cada uno, perfectamente agitados (ver figura). Los tres recipientes completamente llenos con una solución de concentración 30g/l. A partir de cierto momento se alimenta una solución que contiene 50g/l con una gasto de 300 l/min. (hay un arreglo entre los tres recipientes, tal que al haber un gasto al primero, la misma cantidad fluye de este al segundo y del segundo al tercero y de este afuera del sistema, con lo cual se mantiene constante el volumen en todos ellos). Calcule la concentración en cada tanque después de 10 minutos de haber empezado a agregar solución al primero.



300 lit/min

300 lit/min

300 lit/min

## 7.4 Ejercicios y aplicaciones

I. Utilizar los métodos de Euler y de Runge Kutta para dar solución a las siguientes ecuaciones diferenciales con valor frontera.

1

.



2.-



3.-



4.-



5.-



6.-



7.-



8.-



9.-



10.



11.-



12.-



13.-



14.-



15.-



16.



II .- Estructurar un modelo para las problemáticas siguientes y luego solucionarlo Aplicando Euler y Runge Kuta:

1.- Un tanque cilíndrico de fondo plano con diámetro 2 metros contiene un líquido; de densidad 1.8 kg/l a una altura H de 4 metros. Se desea saber la altura del líquido dentro del tanque 10 minutos después que abre completamente de la válvula de salida ubicada en la parte inferior izquierda, la cual da una gasto de 1 m3/s, donde A es el área seccional del tubo de salida que tiene un valor de 80.5 x 10-4m2, considerar g = 9.81m/s2.



2.- Se tiene un tanque esférico de radio de 8 metros calcular el tiempo necesario para que el nivel del líquido de dicho tanque pase de 6 metros a 7 metros, la velocidad de salida por el orificio del fondo es v =5.5 m/s el diámetro de dicho orificio es de 12 cm. Donde a es la altura de líquido.



3.- En un tanque perfectamente agitado se tiene 500 litros de una salmuera en la cual este disuelto 30 Kg de sal común en un momento determinado se hace llegar al tanque un gasto de 90 l/min de una salmuera que contiene 1.5 Kg de sal común por litro si se tiene un gasto de salida de 90 l/min. determine:

a.- Que cantidad de sal hay en el tanque transcurrido 20min.

b.- Que cantidad de sal transcurrido un tiempo muy grande.

4.- Se hace reaccionar isotérmica mente 300gr de acetato de etilo con 200gr de hidróxido de sodio en solución acuosa ajustando el volumen total a 10 litros para dar acetato de sodio y alcohol etílico de acuerdo con lo siguiente ecuación estequiometria:

Acetato de etilo + hidróxido de sodio = acetato de sodio + alcohol etílico



Donde la constante de velocidad de reacción k esta dado por k = 1.44 x 10-2



Determine la cantidad de acetato de sodio y alcohol etílico presente 40min después presentada la reacción.

4.- Se conecta un inductor de 0.5 henries en serie con una resistencia de 10 ohms un capacitador de 0.025 faradios y un generador de corriente al terna dad por la función 60 sen 5t voltios t 0.



a.- Establezca una ecuación diferencial para la carga instantánea en el capacitor.

b.- Encuentre la carga en distintos tiempos

5.- Se tiene un tanque de forma cónica de 5 metros de diámetro superior con 10 metros de altura conteniendo un líquido hasta h metros de altura, si al momento de llegar el nivel del líquido de 2. 5 metros se hace llegar un gasto de alimentación de 0.50 m3/s el nivel de líquido aumentara. Determine el tiempo necesario para que el nivel se recupere nuevamente a 6 metros.

6.- El tiempo que requiere el tanque del ejercicio anterior para recuperar su nivel de 2.5 a 6 metros con un gasto de alimentación de 0.50 m3/s es aproximadamente 500 s calcule el gasto de alimentación que se requiere para reducir este tiempo en la mitad.

7.- Calcule el tiempo necesario para que el nivel del líquido del tanque anterior pase de 6 metros a 1 metro si el flujo de salida por el orificio es 3.457 l/s.



8.- Un tanque perfectamente agitado contiene 800 litros de salmuera en la cual están disueltas 20 Kg. de sal. Si se hace llegar 20 l/min. de una salmuera que contiene 4 Kg de sal en cada 10 litros y por el fondo se saca 16 litros por minuto de salmuera. Determine la concentración de sal a distintos tiempos.

# 7.5. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE E.D.O

## 7.5.1. Estructura

*Cuando en el P.V.I. aparecen una ecuación diferencial de orden n, con n condiciones especificadas en un punto x0 y un punto xf donde se tiene que encontrar el valor de y(xf) se tiene el PVIG*

……………\*1

Para solucionar \*1 es necesario primero pasar la EDO de \*1 a un sistema de n Ecuaciones diferenciales simultaneas de primer orden cada una. Esto es:

Dado:  se realiza el siguiente cambio de variables:

, , , , … 

Que ocurre si derivamos la primera.  y lo sustituye en la segunda , considerando  en la tercera  y si repetimos hasta llegar a las *n* ecuaciones tenemos:

 Entonces 

### 7.5.2. Ejemplo y Aplicaciones

1 Pasar la Ecuación Diferencial Ordinaria a un sistema de dos ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden.

**Solución:**

* *Cambio de variable*

* ; *

* *Derivando la primera y sustituyendo en la segunda*



* *Derivando la segunda*

**

**

2) La siguiente EDO es la ecuación de Bessel y muy conocida en física matemática , donde *“n”* puede tener cualquier valor, pero generalmente toma un valor entero. Escribir como un sistema de ecuaciones ordinarias de primer orden.

*Solución:*

* *Colocamos la ecuación de forma normal*

**

* *Con fines computacionales generalmente se puede realizar lo siguientes cambios*

**

*Luego,*

**

*Sistema que solo será posible resolver para x ≠ 0*

* En general, una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden queda convertida en un sistema de *“n”* ecuaciones diferenciales ordinarias simultaneas de la forma general:
* Supongamos que el método de Runge-Kutta de cuarto orden a dos ecuaciones simultaneas de la forma :

En donde usaremos z como nueva variable solo con la finalidad de no usar subíndices dobles en las ecuaciones.

……….. \*

Las que serán calculadas alternativamente y los “*k”*  y “*c”* obtenidos son:







………………… \* \*









El cálculo debe realizarse en ese orden.

3) Resolver el siguiente problema de valor inicial usando el Método de Runge-Kutta de cuarto orden.



al escribir la EDO como un sistema, el P.V.I. queda



***Solución:***

*Dividiendo el intervalo de interés [1,3] en ocho subintervalos, el tamaño del paso se integración h es igual a 0.25 .*

* *Primera Iteración Usando \**



*Calculo de las Constantes k1, k2, k3, k4  y c1, c2, c3 , c4 Usando \*\**











Cálculo de



, aplicando \*



* *Segunda Iteración*

*Calculo de c y k*



*Calculando y2 = y(1.5) , z2=z(1.75)*



Continuando con los cálculos tenemos:

,



,



,



,



,



,



El valor buscado y(3)=1.578253